



TITLE:

関数 P^n_D を計算するしきい値回路 (理論計算機科学の新展開)

AUTHOR(S):

八島, 大樹; 内澤, 啓; 周, 暁

CITATION:

八島, 大樹 ...[et al]. 関数 P^n_D を計算するしきい値回路 (理論計算機科学の新展開). 数理解析研究所講究録 2013, 1849: 127-132

ISSUE DATE:

2013-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195096>

RIGHT:

関数 P_D^n を計算するしきい値回路 Threshold Circuits to Calculate P_D^n Function

東北大学大学院情報科学研究科 八島 大樹

Daiki Yashima

Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

山形大学大学院理工学研究科 内澤 啓

Kei Uchizawa

Graduate School of Science and Engineering, Yamagata University

東北大学大学院情報科学研究科 周 暁

Xiao Zhou

Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

1 はじめに

しきい値素子は脳の神経細胞の理論モデルのひとつである。神経細胞は、他の神経細胞群から発せられた電気信号を受け取るにより内部電圧が変動し、その値があるしきい値を超えると電気信号を出力する。しきい値素子はこの仕組みをモデル化し、次のように定義される。 n 入力 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ のしきい値素子 g の出力 $g(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ は、各入力変数 x_i に対する接続の強度を表す重み w_i 、およびしきい値 θ に対し、

$$g(\mathbf{x}) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n x_i w_i - \theta \right) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{i=1}^n x_i w_i \geq \theta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定義される。しきい値回路は、しきい値素子を基本構成素子とする組合せ論理回路である。しきい値回路は McCulloch と Pitts[1] により提案された後、理論計算機科学分野で古くから研究がなされてきた。特に、様々な情報処理タスクを対象に、素子数や段数の少ないしきい値回路の設計及びその下界の導出が行われている。しかしながら、その研究対象は理論計算機科学分野において注目度が高い典型的なタスク（足し算、引き算、大小比較、等）を処理するしきい値回路にほぼ限定され、しきい値回路が神経回路網の理論モデルである点

を動機づけとする情報処理タスクの研究はこれまでほとんど展開されてこなかった。

Legenstein と Maass は上記の問題意識のもと、脳が実際に行なっている画像認識に係る情報処理に基づいて、2次元平面上のパターン検知と関連のある情報処理タスク P_D^n を提案し、このタスクを処理するしきい値回路の設計を行った[2]。 P_D^n は、2次元平面を $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ の格子状に分割して得られる n 個のマスそれぞれに配置された2種類の局所特徴検出器 $\mathbf{x} = (x_{0,0}, x_{0,1}, \dots, x_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1}) \in \{0, 1\}^n$ および $\mathbf{y} = (y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1}) \in \{0, 1\}^n$ を入力とし(図1参照)、その検出された特徴の相対的な位置関係に基づくタスクとして定義される。その出力は、 \mathbf{x} により検出された局所特徴の右上に、 \mathbf{y} により検出された局所特徴がある時、かつその時に限り $P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ と定義される。即ち、

$$P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \exists i, j, k, l \text{ } x_{i,j} = y_{k,l} = 1 \\ & \text{かつ } i > k \text{ かつ } j < l, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

である。Legenstein と Maass は、関数 P_D^n を計算する素子数 $O(n)$ のしきい値回路を与えた。さらに、その設計を与えた回路の素子数が $O(n)$ であるだけでなく、段数、ファンイン及び総配線距離が小さく、現実的な神経回路網の構造として優れていることを示した[2]。

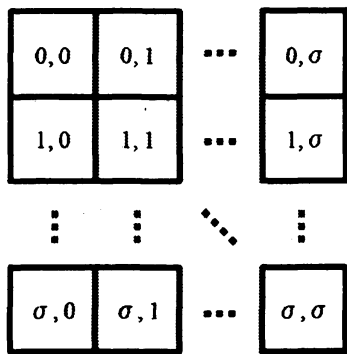


図 1: $\mathbf{x} = (x_{0,0}, x_{0,1}, \dots, x_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1})$ および $\mathbf{y} = (y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1})$ の添え字の配置. 但し, $\sigma = \sqrt{n} - 1$.

本研究では Legenstein と Maass の提案した関数 P_D^n に着目し, P_D^n を計算するしきい値回路の設計を行った. その結果, Legenstein と Maass が与えた回路よりも素子数の少ない, 素子数 $O(\sqrt{n} \log n)$ のしきい値回路の構成を与えることに成功した. さらに関数 P_D^n を計算するしきい値回路の素子数の下界の導出も行い, P_D^n を計算するしきい値回路は $\Omega(\sqrt{n} / \log n)$ 個の素子を必要とすることを示した. この下界の結果により, 我々の与えた関数 P_D^n を計算する回路の設計が素子数の面でほぼ最適であることを理論的に示した.

本論文の構成は以下の通りである. 第 2 章では, 本論文を通じて必要となる諸定義を与える. 第 3 章では, 本研究の主結果である関数 P_D^n を計算するしきい値回路の設計を与えるとともに, 素子数の下界の導出を行う. 最後に第 4 章では本論文の結果をまとめ, 今後の課題について述べる.

2 諸定義

本章では, 本論文を通じて使用する用語の定義を与える. 第 2.1 節では, しきい値素子としきい値回路, およびしきい値回路に係るいくつかの用語を定義する. 第 2.2 節では, 関数 P_D^n を定義する.

2.1 しきい値回路

入力 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ に対するしきい値素子 g の出力 $g(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ は, 各入力変数 x_i

に対する重み w_i およびしきい値 θ により以下のように定義される.

$$g(\mathbf{x}) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n x_i w_i - \theta \right) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{i=1}^n x_i w_i \geq \theta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本論文では, 素子の重み w_1, w_2, \dots, w_n としきい値 θ は任意の実数とする.

しきい値回路 C はしきい値素子を基本構成素子とする組合せ回路であり, その回路は閉路のない有向グラフで表現される. 回路への入力変数の個数を n として, n 個の入力変数それぞれを x_1, x_2, \dots, x_n とする. しきい値回路を構成する各しきい値素子への入力は, x_1, x_2, \dots, x_n および他の素子の出力の一部または全部からなる. 入力 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対するしきい値回路の出力 $C(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ は, 回路を構成する素子の最上段にある素子 g の出力となる. 即ち, 任意の $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ について, $C(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ である. 関数 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ に対し, 任意の $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ について $C(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ となるとき, しきい値回路 C は関数 f を計算する回路であると定義する. しきい値回路 C の素子数 s とは, 回路 C を構成するしきい値素子の個数である.

2.2 関数 P_D^n

関数 P_D^n は, \sqrt{n} が整数となる n に対して, \sqrt{n} 行 \sqrt{n} 列の 2 次元平面上に並べられた入力変数 $\mathbf{x} = (x_{0,0}, x_{0,1}, \dots, x_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1})$ と $\mathbf{y} = (y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1})$ に対し, $i > k$ かつ $j < l$ を満たす $x_{i,j} = y_{k,l} = 1$ なるインデックス i, j, k, l が存在する時, かつその時に限り 1 を出力する. 即ち

$$P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \exists i, j, k, l \text{ } x_{i,j} = y_{k,l} = 1 \\ & \text{かつ } i > k \text{ かつ } j < l, \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

である. 直感的には, 関数 P_D^n は 2 次元平面上で $x_{i,j} = 1$ である場所の右上に $y_{k,l} = 1$ が存在する時, かつその時に限り 1 を出力する関数であるといえる.

3 関数 P_D^n を計算するしきい値回路

本章では、本研究の主結果である関数 P_D^n を計算するしきい値回路の設計、および素子数の下界について述べる。第3.1節では関数 P_D^n を計算するしきい値回路の具体的な構成を与え、第3.2節では素子数の下界を与える。

3.1 回路の構成

本節の主結果は、次の定理である。

定理 1 関数 P_D^n は、素子数 $s = O(\sqrt{n} \log n)$ のしきい値回路により計算できる。

以下で定理 1 を、実際に回路の設計を与えることにより証明する。

証明 具体的な回路の構成を与える前に、いくつかの用語を導入する。 $\mathbf{x} = (x_{0,0}, \dots, x_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1}) \in \{0,1\}^n$, $\mathbf{y} = (y_{0,0}, \dots, y_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1}) \in \{0,1\}^n$ を、 P_D^n へのある入力割り当てとする。この時、 $0 \leq j \leq \sqrt{n}-1$ なる各 j について、 \mathbf{x} の j 列目の入力 $x_{0,j}, x_{1,j}, \dots, x_{\sqrt{n}-1,j}$ の中で $x_{i,j} = 1$ を満たす最も大きな添字 i を $\alpha_j(\mathbf{x})$ とする。即ち、

$$\alpha_j(\mathbf{x}) = \max\{i \mid x_{i,j} = 1\}$$

である。同様に、 $0 \leq l \leq \sqrt{n}-1$ なる各 l について、 \mathbf{y} の l 列目の入力 $y_{0,l}, y_{1,l}, \dots, y_{\sqrt{n}-1,l}$ の中で $y_{k,l} = 1$ を満たす最も小さな添字 k に着目し、 $\beta_l(\mathbf{y})$ を次のように定義する。

$$\beta_l(\mathbf{y}) = (\sqrt{n}-1) - \min\{k \mid y_{k,l} = 1\}.$$

明らかに、 $0 \leq \alpha_j(\mathbf{x}), \beta_l(\mathbf{y}) \leq \sqrt{n}-1$ を満たす。さらに、 $0 \leq l \leq \sqrt{n}-1$ なる各 l について、 $\beta_l^*(\mathbf{y})$ を再帰的に次のように定義する。 $l = \sqrt{n}-1$ なる $\beta_{\sqrt{n}-1}^*(\mathbf{y})$ について

$$\beta_{\sqrt{n}-1}^*(\mathbf{y}) = \beta_{\sqrt{n}-1}(\mathbf{y}) \quad (1)$$

とし、 $\sqrt{n}-2 \geq l \geq 0$ なる l について、

$$\beta_l^*(\mathbf{y}) = \max(\beta_l(\mathbf{y}), \beta_{l+1}^*(\mathbf{y})) \quad (2)$$

とする。 $n = 16$ のときの $\alpha_j(\mathbf{x}), \beta_l(\mathbf{y})$ および $\beta_l^*(\mathbf{y})$ の具体例を図 2 に示す。次の主張が成立する。

主張 1 $\alpha_j(\mathbf{x}) + \beta_l^*(\mathbf{y}) \geq \sqrt{n}$ を満たす $l = j+1$ なる j および l が存在する時、かつその時に限り $P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ である。

				$\beta_{0(y)}^*$	$\beta_{1(y)}^*$	$\beta_{2(y)}^*$	$\beta_{3(y)}^*$
				3	2	1	1
				↑	↑	↑	↑
$\alpha_0(x)$	$\alpha_1(x)$	$\alpha_2(x)$	$\alpha_3(x)$	$\beta_0(y)$	$\beta_1(y)$	$\beta_2(y)$	$\beta_3(y)$
1	3	2	0	3	2	0	1
$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	$x_{0,3}$	$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$y_{0,2}$	$y_{0,3}$
0	1	0	1	1	0	0	0
$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	$y_{1,3}$
1	0	1	0	1	1	0	0
$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$	$y_{2,0}$	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$	$y_{2,3}$
0	0	1	0	0	0	0	1
$x_{3,0}$	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$	$y_{3,0}$	$y_{3,1}$	$y_{3,2}$	$y_{3,3}$
0	1	0	0	1	0	1	0

図 2: $\alpha_j(\mathbf{x}), \beta_l(\mathbf{y})$ と $\beta_l^*(\mathbf{y})$ の具体例

証明 (\Rightarrow): $\alpha_j(\mathbf{x}) + \beta_l^*(\mathbf{y}) \geq \sqrt{n}$ を満たす $l = j+1$ なる j および l が存在すると仮定する。このとき $\alpha_j(\mathbf{x}) = i$ かつ $x_{i,j} = 1$ である $x_{i,j}$ が存在する。さらに $\beta_l^*(\mathbf{y})$ は $\beta_m(\mathbf{y})$ ($l \leq m \leq \sqrt{n}-1$) の最大値であることから、 $\beta_l^*(\mathbf{y}) = (\sqrt{n}-1-k)$ かつ $y_{k,m} = 1$ である $y_{k,m}$ が存在する。

仮定 $\alpha_j(\mathbf{x}) + \beta_l^*(\mathbf{y}) \geq \sqrt{n}$ に、上記の $\alpha_j(\mathbf{x})$ と $\beta_l^*(\mathbf{y})$ の値を代入すると $i + (\sqrt{n}-1-k) \geq \sqrt{n}$ を得る。この式を変形すると $i \geq k+1$ となるが、いま i と k は 0 以上の整数であるため、結局 $i > k$ を得る。同様に仮定より $l = j+1$ であり、さらに $j < l \leq m$ が成り立つことから $j < m$ を得る。以上から $i > k$ かつ $j < m$ を満たす $x_{i,j} = y_{k,m} = 1$ なるインデックス i, j, k, m が存在すること、つまり $P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ であることが示された。

(\Leftarrow): $P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ を満たす、つまり $i > k$ かつ $j < m$ を満たす $x_{i,j} = y_{k,m} = 1$ なるインデックス i, j, k, m が存在すると仮定する。このとき \mathbf{x} の j 列目の入力 $x_{0,j}, x_{1,j}, \dots, x_{\sqrt{n}-1,j}$ の中で $x_{i',j} = 1$ を満たす最も大きな添字を i' とする。同様に \mathbf{y} の m 列目の入力 $y_{0,m}, y_{1,m}, \dots, y_{\sqrt{n}-1,m}$ の中で $y_{k',m} = 1$ を満たす最も小さな添字を k' とする。 $i' \geq i$ かつ $k \geq k'$ であるため、仮定より $i' \geq i > k \geq k'$ かつ $j < m$ を満たす、 $x_{i',j} = y_{k',m} = 1$ なるインデックス i', j, k', m が存在する。

ここで定義より $\alpha_j(\mathbf{x}) = i'$, $\beta_m(\mathbf{y}) = (\sqrt{n}-1-k')$ および $\beta_l^*(\mathbf{y}) \geq \beta_m(\mathbf{y})$ ($0 \leq l \leq m$) が成り立つ。 $i' > k'$ に上記の i' と k' の値を代入すると $\alpha_j(\mathbf{x}) > (\sqrt{n}-1) - \beta_m(\mathbf{y}) \geq (\sqrt{n}-1) - \beta_l^*(\mathbf{y})$

を得る. 式を整理して $\alpha_j(x) + \beta_l^*(y) > (\sqrt{n} - 1)$ を得る. いま $\alpha_j(x)$ と $\beta_l^*(y)$ は 0 以上の整数であるため, 結局 $\alpha_j(x) + \beta_l^*(y) \geq \sqrt{n}$ を得る. また $j < m$ かつ $l \leq m$ であるため, $l = j + 1$ かつ $\alpha_j(x) + \beta_l^*(y) \geq \sqrt{n}$ を満たす j および l が存在することが示された. ■

図 2 においては, $\alpha_1(x) + \beta_2^*(y) \geq \sqrt{n} = 4$ かつ $l = 2 = 1 + 1 = j + 1$ なる j と l が存在し, $P_D^n(x, y) = 1$ である.

上で定義した用語及び主張 1 を基に, しきい値回路の設計を行う. $\tau = \lceil \log \sqrt{n} \rceil = \lceil (\log n)/2 \rceil$ とする.

まず初めに, $0 \leq j \leq \sqrt{n} - 1$ なる各 j について, τ 個のしきい値素子 $g_{j,0}^x, g_{j,1}^x, \dots, g_{j,\tau-1}^x$ を用いて, $\alpha_j(x)$ を 2 進数表現する. 即ち, $0 \leq t \leq \tau - 1$ なる各 t について, 素子 $g_{j,t}^x$ はしきい値 1 を持ち, さらに入力として $x_{0,j}, x_{1,j}, \dots, x_{\sqrt{n}-1,j}$ を受け取る. $0 \leq i \leq \sqrt{n} - 1$ なる i について, 入力 $x_{i,j}$ に対する重みは,

$$p_{i,t} \equiv \left\lfloor \frac{i}{2^t} \right\rfloor \pmod{2}$$

を満たす $p_{i,t} \in \{0, 1\}$ を用いて

$$(-1)^{1+p_{i,t}} \cdot 2^i$$

となる. 即ち,

$$g_{j,t}^x(x) = \text{sign} \left(-1 + \sum_{i=0}^{\sqrt{n}-1} (-1)^{1+p_{i,t}} \cdot 2^i x_{i,j} \right)$$

となる. この構成より, $g_{j,0}^x, g_{j,1}^x, \dots, g_{j,\tau-1}^x$ は

$$\alpha_j(x) = \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t \cdot g_{j,t}^x(x)$$

を満たし, 素子群 $g_{j,0}^x, g_{j,1}^x, \dots, g_{j,\tau-1}^x$ は, $g_{j,0}^x(x)$ を最下位桁, $g_{j,\tau-1}^x(x)$ を最上位桁とする, $\alpha_j(x)$ の 2 進数表現であることが分かる.

同様に, $0 \leq l \leq \sqrt{n} - 1$ なる各 l について, $\beta_l(y)$ を 2 進数表現する τ 個のしきい値素子 $g_{l,0}^y, g_{l,1}^y, \dots, g_{l,\tau-1}^y$ を, 次のように構成する. $0 \leq t \leq \tau - 1$ なる各 t について, 素子 $g_{l,t}^y$ はしきい値 1 を持ち, さらに入力として $y_{0,l}, y_{1,l}, \dots, y_{\sqrt{n}-1,l}$ を受け取る. $0 \leq k \leq \sqrt{n} - 1$ なる k について, 入力 $y_{k,l}$ に対する重みは,

$$q_{k,t} \equiv \left\lfloor \frac{\sqrt{n} - 1 - k}{2^t} \right\rfloor \pmod{2}$$

を満たす $q_{k,t} \in \{0, 1\}$ を用いて

$$(-1)^{1+q_{k,t}} \cdot 2^{\sqrt{n}-1-k}$$

となる. 即ち,

$$g_{l,t}^y(y) = \text{sign} \left(-1 + \sum_{k=0}^{\sqrt{n}-1} (-1)^{1+q_{k,t}} \cdot 2^{\sqrt{n}-1-k} y_{k,l} \right)$$

となる. 構成より

$$\beta_l(y) = \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t \cdot g_{l,t}^y(y)$$

となり, $g_{l,0}^y, g_{l,1}^y, \dots, g_{l,\tau-1}^y$ は, $g_{l,0}^y(y)$ を最下位桁, $g_{l,\tau-1}^y(y)$ を最上位桁とする, $\beta_l(y)$ の 2 進数表現であることが分かる.

次に, $0 \leq l \leq \sqrt{n} - 1$ なる各 l について, $\beta_l^*(y)$ を 2 進数で表現するために用いる回路 C^* を導入する. C^* は, τ 桁の 2 進数として表現された 2 つの整数 $a \in \{0, 1\}^\tau$ 及び $b \in \{0, 1\}^\tau$ を入力とし, その大きい方を出力する回路として設計される. より厳密には, 回路 C^* は次の主張を満たす.

主張 2 回路 C^* は 2 つの τ 桁の 2 進数を入力とし, τ 個のしきい値素子 $h_0^y, h_1^y, \dots, h_{\tau-1}^y$ を出力として持ち, 以下を満たす. 任意の入力 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{\tau-1}) \in \{0, 1\}^\tau$ 及び $b = (b_0, b_1, \dots, b_{\tau-1}) \in \{0, 1\}^\tau$ に対して,

$$\begin{aligned} & (h_0^y(a, b), h_1^y(a, b), \dots, h_{\tau-1}^y(a, b)) \\ &= \begin{cases} a & \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t a_t > \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t b_t \text{ の時,} \\ b & \text{それ以外.} \end{cases} \end{aligned}$$

となる. さらに, C^* の素子数は $3\tau + 2$ である.

証明 まず 2 つの τ 桁の 2 進数 a, b のうちどちらが大きいかを 2 つの素子 g^a と g^b を用いて判定する. g^a と g^b は $a = (a_0, a_1, \dots, a_{\tau-1})$ 及び $b = (b_0, b_1, \dots, b_{\tau-1})$ を入力とし, その定義は以下の通りである.

$$g^a(a, b) = \text{sign} \left(-1 + \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t a_t - \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t b_t \right)$$

$$g^b(a, b) = \text{sign} \left(-\sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t a_t + \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t b_t \right)$$

即ち素子 g^a は $\sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t a_t > \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t b_t$ の時, かつその時に限り 1 を出力する素子であり, 素子 g^b

は $\sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t a_t \leq \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t b_t$ の時、かつその時に限り 1 を出力する素子である。次に、 \mathbf{a} および \mathbf{b} のコピーを 2 進数表現で出力する素子 g_t^a, g_t^b を $0 \leq t \leq \tau-1$ の範囲で用意する。ただし、 $\sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t a_t > \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t b_t$ の場合、 $0 \leq t \leq \tau-1$ なる t について $g_t^b = 0$ であり、それ以外の場合 $g_t^a = 0$ となるように設計する。即ち、

$$g_t^a(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{sign}(-1 + a_t - g^b(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

$$g_t^b(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{sign}(-1 + b_t - g^a(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

とする。最後に素子 h_t^y を $0 \leq t \leq \tau-1$ の範囲で用意し、2 進数 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{\tau-1})$ 及び $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{\tau-1})$ のうち大きいものを各素子の出力とする。即ち、

$$h_t^y = \text{sign}(-1 + g_t^a(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + g_t^b(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

と定義する。この回路 C^* の構成に必要な素子数は明らかに $3\tau + 2$ である。■

上記 C^* を利用し、 $\beta_0^*(\mathbf{y}), \beta_1^*(\mathbf{y}), \dots, \beta_{\sqrt{n}-1}^*(\mathbf{y})$ を 2 進数で表現する。まず簡単のため、式 (1) であることから、素子群 $g_{\sqrt{n}-1,0}^y, g_{\sqrt{n}-1,1}^y, \dots, g_{\sqrt{n}-1,\tau-1}^y$ に着目し、 $0 \leq t \leq \tau-1$ なる各 t について素子名 $h_{\sqrt{n}-1,t}^y$ を $g_{\sqrt{n}-1,t}^y$ と同一視する。さらに、それぞれが C^* のコピーである $\sqrt{n}-1$ 個の回路 $C_0^*, C_1^*, \dots, C_{\sqrt{n}-2}^*$ を用意し、 $0 \leq l \leq \sqrt{n}-2$ なる各 l について、 $\beta_l^*(\mathbf{y})$ の 2 進数表現を C_l^* の出力素子である $h_{l,0}^y, h_{l,1}^y, \dots, h_{l,\tau-1}^y$ に相当させる。即ち、 C_l^* の 2 つの τ 桁の 2 進数の入力として、 $g_{l,0}^y, g_{l,1}^y, \dots, g_{l,\tau-1}^y$ 及び $h_{l+1,0}^y, h_{l+1,1}^y, \dots, h_{l+1,\tau-1}^y$ を充てれば良い。式 (2) 及び主張 2 より明らかに、 $\beta_l^*(\mathbf{y})$ の 2 進数表現が、 $h_{l,0}^y, h_{l,1}^y, \dots, h_{l,\tau-1}^y$ に一致することが分かる。

続いて主張 1 に基づき、 $0 \leq j \leq \sqrt{n}-2$ なる各 j について、 $\alpha_j(\mathbf{x}) + \beta_{j+1}^*(\mathbf{y}) \geq \sqrt{n}$ を判定する素子 r_j を構成する。素子 r_j は、しきい値 \sqrt{n} を持ち、入力として $l = j+1$ なる $g_{j,0}^x, g_{j,1}^x, \dots, g_{j,\tau-1}^x$ 及び $h_{l,0}^y, h_{l,1}^y, \dots, h_{l,\tau-1}^y$ の出力を受け取る。 $0 \leq t \leq \tau-1$ なる各 t について、素子 $g_{j,t}^x$ と $h_{l,t}^y$ に対する重みは 2^t とする。即ち

$$r_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{sign}\left(-\sqrt{n} + \sum_{t=0}^{\tau-1} 2^t (g_{j,t}^x(\mathbf{x}) + h_{l,t}^y(\mathbf{y}))\right)$$

である。主張 1 より明らかに、素子群 $r_0, \dots, r_{\sqrt{n}-2}$ の少なくともひとつが 1 を出力するとき、かつそ

の時に限り、 $P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ となる。よって最後に、 $r_0, \dots, r_{\sqrt{n}-2}$ の出力の OR を計算する素子 g を、回路 C の出力素子として次のように構成し、回路が完成する。素子 g は、しきい値 1 を持ち、入力として $r_0, r_1, \dots, r_{\sqrt{n}-2}$ の出力それぞれを重み 1 で受けとる。即ち、

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{sign}\left(-1 + \sum_{j=0}^{\sqrt{n}-2} r_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)$$

である。これで回路の構成は示された。

最後に設計した回路の素子数 s について解析する。 $0 \leq j, l \leq \sqrt{n}-1$ を満たす各列 j, l について $\alpha_j(\mathbf{x})$ と $\beta_l(\mathbf{y})$ の 2 進数表現を計算するためにそれぞれ τ 個の素子を用いるため、 $\alpha_0(\mathbf{x}), \dots, \alpha_{\sqrt{n}-1}(\mathbf{x})$ と $\beta_0(\mathbf{y}), \dots, \beta_{\sqrt{n}-1}(\mathbf{y})$ を計算するために $2\tau\sqrt{n}$ 個の素子を用いる。また回路 C^* ひとつの構成に必要な素子数は主張 2 から $3\tau + 2$ であることから、 C^* のコピーである回路 $C_0^*, C_1^*, \dots, C_{\sqrt{n}-2}^*$ の構成に必要な素子数は $(\sqrt{n}-1)(3\tau + 2)$ となる。さらに主張 1 に基づき $0 \leq j \leq \sqrt{n}-2$ なる各 j について、 $\alpha_j(\mathbf{x}) + \beta_{j+1}^*(\mathbf{y}) \geq \sqrt{n}$ を判定する $\sqrt{n}-1$ 個の素子 $r_0, r_1, \dots, r_{\sqrt{n}-2}$ が必要となる。最後に素子 $r_0, r_1, \dots, r_{\sqrt{n}-2}$ の OR を計算する素子 g を 1 個用いる。以上の解析から、今回設計した回路の素子数 s は

$$\begin{aligned} s &= 2\tau\sqrt{n} + (\sqrt{n}-1)(3\tau + 2) + \sqrt{n} - 1 + 1 \\ &= 5\tau\sqrt{n} + 3\sqrt{n} - 3\tau - 2 \end{aligned}$$

となる。 $\tau = \lceil (\log n)/2 \rceil$ であることから、 $s = O(\sqrt{n} \log n)$ を得る。■

3.2 下界の導出

本節では、関数 P_D^n を計算するしきい値回路の素子数の下界を導出する。具体的には次の定理を証明する。

定理 2 関数 P_D^n を計算する任意のしきい値回路の素子数 s は $s = \Omega(\sqrt{n}/\log n)$ を満たす。

定理 2 の証明には関数 $DISJ^n$ に関する既知の結果を利用する。関数 $DISJ^n$ は、入力 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ 及び $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ に対し、

$$DISJ^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \exists i (x_i = y_i = 1), \\ 1 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

0	0	0	0
x_0	0	0	0
0	x_1	0	0
0	0	x_2	0

0	y_0	0	0
0	0	y_1	0
0	0	0	y_2
0	0	0	0

図 3: 関数 P_D^n の入力割り当て

と定義される。Nisan は $DISJ^n$ を計算するしきい値回路について、論文 [3] にて次の補題を示した。

補題 $DISJ^n$ を計算するしきい値回路の素子数 s は、 $s = \Omega(n/\log n)$ を満たす。

この補題を用いて、定理 2 を以下に証明する。

証明 C を関数 P_D^n を計算する任意のしきい値回路とする。関数 P_D^n の入力 $\mathbf{x} = (x_{0,0}, \dots, x_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1})$ 及び $\mathbf{y} = (y_{0,0}, \dots, y_{\sqrt{n}-1, \sqrt{n}-1})$ の中で、 $0 \leq i \leq \sqrt{n}-2$ なる i について、 $x_{i+1,i}$ および $y_{i,i+1}$ に着目し、これ以外の入力を 0 とした、特殊な入力割り当ての集合を考える。 $0 \leq i \leq \sqrt{n}-2$ なる i について、 $x_i = x_{i+1,i}$ および $y_i = y_{i,i+1}$ と振りなおすと (図 3)、 $P_D^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ となるのは、 $x_i = y_i = 1$ なるインデックス i がひとつ以上存在する時、かつその時に限る。即ちこれは、 $DISJ^{\sqrt{n}-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が 0 となる条件に等しい。つまり $0 \leq i \leq \sqrt{n}-2$ なる i について、 $x_{i+1,i}$ 及び $y_{i,i+1}$ を除く変数への割り当てを 0 に固定した入力のみを考えた場合の関数 P_D^n は、関数 $DISJ^{\sqrt{n}-1}$ の否定に一致する。

以上から、関数 P_D^n を計算する素子数 s のしきい値回路 C が存在するならば、入力の一部を 0 に固定し、さらに回路の最上段に出力値を反転するしきい値素子 1 つを追加すれば、関数 $DISJ^{\sqrt{n}-1}$ が計算できることが示された。よって関数 $DISJ^{\sqrt{n}-1}$ の計算に必要な素子数は $\Omega(\sqrt{n}/\log n)$ であるため、関数 P_D^n を計算するしきい値回路 C の素子数 s も明らかに $s = \Omega(\sqrt{n}/\log n)$ を満たす。 ■

4 まとめ

本論文では、脳の神経回路網のモデルの 1 つであるしきい値回路に着目し、パターン検知に関連する関数 P_D^n を計算するしきい値回路の設計、及びその素子数の下界の導出を行った。その結果、関数

P_D^n を計算する素子数 $s = O(\sqrt{n} \log n)$ のしきい値回路を実際に構成することで、既知の回路の素子数 $s = O(n)$ を $s = O(\sqrt{n} \log n)$ に改善した。さらに関数 P_D^n を計算するために必要な素子数 s が $\Omega(\sqrt{n}/\log n)$ であることを導出した。我々の設計した関数 P_D^n を計算するしきい値回路の素子数が $O(\sqrt{n} \log n)$ である一方、その下界が $\Omega(\sqrt{n}/\log n)$ であることから、素子数の面でほぼ最適な回路を得られたと言える。

今後の課題として、関数 P_D^n を計算するしきい値回路の素子数について、わずかに残る上界と下界の差を狭めることが挙げられる。

参考文献

- [1] W. S. McCulloch, W. H. Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. Bulletin of Mathematical Biophysics. Volume 5, pp. 115-133, 1943.
- [2] R. A. Legenstein, W. Maass, *Foundations for a circuit complexity theory of sensory processing*. Neural Information Processing Systems, Volume 13, pp. 259-265, 2001.
- [3] Noam Nisan, *The communication complexity of threshold gates*. Combinatorics, Paul Erdos is Eighty, pp. 301-315, 1994.